2 項分布の平均と分散

2 値変数 *dichotomous variable* の例： 内閣を支持するか，そうでないか。支持すれば 1，それ以外は 0

世論調査の回答者数を n 人とする。或人が現在の内閣を支持していれば 1，支持しないかわからない・どちらともいえないなら 0 の値をとる 2 値変数 u と考える。これが n 人全てについてある。n 人全ての u の平均を計算すると，それが標本比率 p になる。

母集団 N 人全てについて 2 値変数 u （0 または 1)を考える（**母集団分布**）。母集団において u=1 となる比率（**母比率**）を π とする（成功確率 π の **ベルヌーイ分布 Bernoulli distribution**）。

標本での支持者数が $\omega(=np)$となる確率は，次式で表現される。

$$\binom{n}{\omega}\pi^{\omega}(1-\pi)^{n-\omega}=\frac{n!}{\omega!\,(n-\omega)!}\pi^{\omega}(1-\pi)^{n-\omega}$$

この式で表現される確率分布は、2 **項分布**（binomial distribution）と呼ばれ、一般的には「成功確率が π の試行を独立に n 回繰り返した時の成功数 ω の確率を与える分布」と定義される。2 項分布の確率の総和は 1 になる。標準正規分布の全面積や t 分布の全面積が 1 になる事と同じである。総和 1 とは比率が 1.00 であると云う事，つまり 100%である事を意味している。

7–3. 母比率の区間推定

支持者数 ω（ω=0, 1, 2, ..., n）の期待値 $\overline{\omega}$ は $\overline{\omega}=n\pi$ となる。

$$\begin{aligned}\overline{\omega}&=\sum_{\omega=0}^{n}\omega\binom{n}{\omega}\pi^{\omega}(1-\pi)^{n-\omega}=\sum_{\omega=0}^{n}\omega\frac{n!}{\omega!\,(n-\omega)!}\pi^{\omega}(1-\pi)^{n-\omega}=\sum_{\omega=1}^{n}\omega\frac{n!}{\omega!\,(n-\omega)!}\pi^{\omega}(1-\pi)^{n-\omega}\\&=\sum_{\omega=1}^{n}n\frac{(n-1)!}{(\omega-1)!\,(n-\omega)!}\pi\cdot\pi^{\omega-1}(1-\pi)^{n-\omega}=n\pi\sum_{\omega=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(\omega-1)!\,(n-\omega)!}\pi^{\omega-1}(1-\pi)^{n-\omega}\\&=n\pi\sum_{\omega=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{\omega!\,\{(n-1)-\omega\}!}\pi^{\omega}(1-\pi)^{(n-1)-\omega}=n\pi\sum_{\omega=0}^{m}\frac{m!}{\omega!\,\{m-\omega\}!}\pi^{\omega}(1-\pi)^{m-\omega}=n\pi\end{aligned}$$

また、支持者数 ω の標本抽出分布の標準偏差（標準誤差）は、$\sigma_\omega = \sqrt{n\pi(1-\pi)}$ となる。

支持者数 ω の標本抽出分布の分散は,

$$\sigma_\omega^2 = \sum_{\omega=0}^{n} (\omega - n\pi)^2 \binom{n}{\omega} \pi^\omega (1-\pi)^{n-\omega} = \sum_{\omega=0}^{n} (\omega^2 - 2n\pi\omega + n^2\pi^2) \binom{n}{\omega} \pi^\omega (1-\pi)^{n-\omega}$$

$$= \sum_{\omega=0}^{n} (\omega^2 - 2n\pi\omega + n^2\pi^2) \binom{n}{\omega} \pi^\omega (1-\pi)^{n-\omega}$$

$$= \sum_{\omega=0}^{n} \omega^2 \binom{n}{\omega} \pi^\omega (1-\pi)^{n-\omega} - 2n\pi \sum_{\omega=0}^{n} \omega \binom{n}{\omega} \pi^\omega (1-\pi)^{n-\omega} + \sum_{\omega=0}^{n} n^2\pi^2 \binom{n}{\omega} \pi^\omega (1-\pi)^{n-\omega}$$

$$= \sum_{\omega=0}^{n} \omega^2 \binom{n}{\omega} \pi^\omega (1-\pi)^{n-\omega} - 2n\pi \sum_{\omega=0}^{n} \omega \binom{n}{\omega} \pi^\omega (1-\pi)^{n-\omega} + n^2\pi^2 \sum_{\omega=0}^{n} \binom{n}{\omega} \pi^\omega (1-\pi)^{n-\omega}$$

$$= \sum_{\omega=0}^{n} \omega^2 \binom{n}{\omega} \pi^\omega (1-\pi)^{n-\omega} - 2n\pi \cdot n\pi + n^2\pi^2 = \sum_{\omega=0}^{n} \omega^2 \binom{n}{\omega} \pi^\omega (1-\pi)^{n-\omega} - n^2\pi^2$$

$$\sum_{\omega=0}^{n} \omega^2 \binom{n}{\omega} \pi^\omega (1-\pi)^{n-\omega} = \sum_{\omega=0}^{n} \omega(\omega-1) \binom{n}{\omega} \pi^\omega (1-\pi)^{n-\omega} + \sum_{\omega=0}^{n} \omega \binom{n}{\omega} \pi^\omega (1-\pi)^{n-\omega}$$

$$= \sum_{\omega=0}^{n} \omega(\omega-1) \binom{n}{\omega} \pi^\omega (1-\pi)^{n-\omega} + n\pi$$

$$\sum_{\omega=0}^{n} \omega(\omega-1) \binom{n}{\omega} \pi^\omega (1-\pi)^{n-\omega} = \sum_{\omega=0}^{n} \omega(\omega-1) \frac{(n-1)!}{(\omega-1)!\,(n-\omega)!} \pi^\omega (1-\pi)^{n-\omega}$$

$$= \sum_{\omega=0}^{n} \omega(\omega-1) \frac{n!}{\omega!\,(n-\omega)!} \pi^\omega (1-\pi)^{n-\omega} = \sum_{\omega=2}^{n} \omega(\omega-1) \frac{n!}{\omega!\,(n-\omega)!} \pi^\omega (1-\pi)^{n-\omega}$$

$$= \sum_{\omega=2}^{n} \frac{n(n-1)\cdot(n-2)!}{(\omega-2)!\,(n-2-\omega+2)!} \pi^2 \pi^{\omega-2} (1-\pi)^{n-2-\omega+2}$$

$$= n(n-1)\pi^2 \sum_{\omega=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(\omega-2)!\,(n-2-\omega+2)!} \pi^{\omega-2} (1-\pi)^{n-2-\omega+2}$$

$$= n(n-1)\pi^2 \sum_{\omega=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{\omega!\,(n-2-\omega)!} \pi^\omega (1-\pi)^{n-2-\omega} = n(n-1)\pi^2 \sum_{\omega=0}^{m} \frac{m!}{\omega!\,(m-\omega)!} \pi^\omega (1-\pi)^{m-\omega}$$

$$= n(n-1)\pi^2$$

$$\sigma_\omega^2 = n(n-1)\pi^2 + n\pi - n^2\pi^2 = n^2\pi^2 - n\pi^2 + n\pi - n^2\pi^2 = n\pi - n\pi^2 = n\pi(1-\pi)$$