最小二乗和法で残差平方和を最小にした時，残差 e の平均，残差 e と x の共分散，残差 e と予測値の共分散はそれぞれ 0 になる。

$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}$，$\hat{\beta}_1 = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = r_{xy} \cdot \frac{s_y}{s_x}$ であるから，

$$\bar{e} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_0 - \sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_1 x_i\right) = \bar{y} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1\bar{x}$$
$$= \bar{y} - \left(\bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}\right) - \hat{\beta}_1\bar{x} = 0$$

$$s_{xe} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(e_i - \bar{e})(x_i - \bar{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right)(x_i - \bar{x})$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i x_i - \hat{\beta}_0 x_i - \hat{\beta}_1 x_i^2\right) - \bar{x}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \hat{\beta}_0\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{\beta}_1\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}\right)\bar{x} - \hat{\beta}_1\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y} + \hat{\beta}_1\bar{x}^2 - \hat{\beta}_1\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y} - \hat{\beta}_1\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2\right)$$
$$= s_{xy} - \hat{\beta}_1 s_x^2 = s_{xy} - \frac{s_{xy}}{s_x^2}s_x^2 = 0$$

上の式をよく見ると，
これが 0 になる事が既に示されている。

$$s_{\hat{y}e} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}}\right)(e_i - \bar{e}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1\bar{x}\right)\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_1(x_i - \bar{x})\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right) = \hat{\beta}_1\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right) = 0$$

上の式変形の初めの方を
見よ。これが 0 になる事
が既に示されている。

以上から，残差と x，残差と予測値 $\hat{y}$ の相関係数がゼロ(独立)である事が分かる。

共分散が 0 なら当然相関
係数も 0 になる。